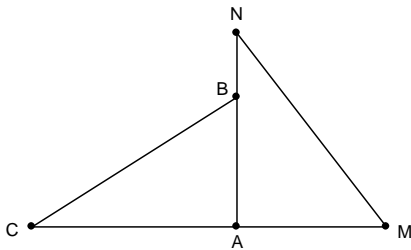


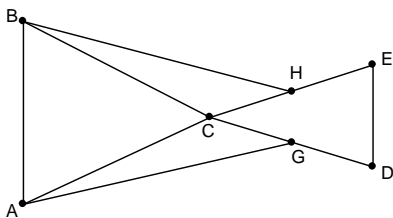
# Probleme de congruență a triunghiurilor

prof. Zîrnă Cătălin

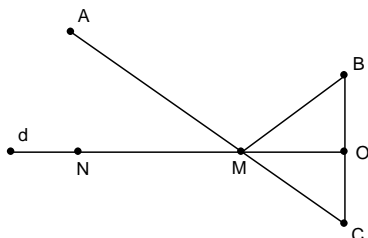
1. Fie  $\triangle ABC$  isoscel, cu  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $M \in [AC]$ ,  $N \in [AB]$  astfel încât  $[AM] \equiv [AN]$ . Demonstrați că  $\angle AMB \equiv \angle ANC$ .
2. Fie  $\triangle ABC$ ,  $m(\angle A) = 90^\circ$ ,  $AC = 4$  cm,  $AB = 3$  cm. Considerăm punctele  $M \in AC$  (A între C și M) și  $N \in AB$  (B între A și N) astfel încât  $AM = 3$  cm și  $BN = 1$  cm. Demonstrați că:  
a)  $[BC] \equiv [MN]$ ;    b)  $\angle MNA \equiv \angle ACB$ ;    c)  $\angle AMN \equiv \angle ABC$ .



3. În figura de mai jos  $[AC] \equiv [BC]$ ,  $[DC] \equiv [EC]$ , G este mijlocul segmentului  $[DC]$ , H mijlocul segmentului  $[CE]$  și  $m(\angle ACE) = m(\angle BCD)$ . Arătați că  $[AG] \equiv [BH]$ .

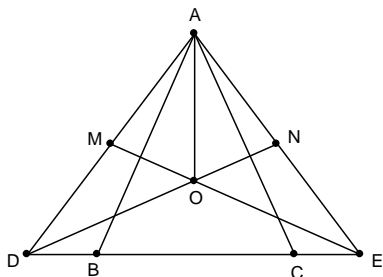


4. Fie O un punct pe segmentul  $[AB]$ , iar C și D de o parte și de alta a dreptei AB, astfel încât  $\triangle OBC \equiv \triangle OBD$ . Arătați că  $[AC] \equiv [AD]$  și că  $[AB]$  este bisectoarea unghiului CAD.
5. În figura alăturată avem: A, M, C și N, M, O puncte coliniare,  $BC \perp d$  și O este mijlocul segmentului  $[BC]$ . Arătați că: a)  $\angle AMN \equiv \angle BMO$ ; b)  $AM + MB = AC$ .



6. Fie punctul B în interiorul unghiului propriu AOC, astfel încât punctele A, B, C să fie necoliniare. Pe semidreptele opuse lui (OA, (OB, (OC se iau respectiv punctele A', B', C' astfel încât  $[OA] \equiv [OA']$ ,  $[OB] \equiv [OB']$ ,  $[OC] \equiv [OC']$ . Arătați că  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

7. În figura de mai jos se știe că:  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $\angle ABC \equiv \angle ACB$ ,  $[BD] \equiv [CE]$ , M este mijlocul lui  $[AD]$  și N mijlocul lui  $[AE]$ . Demonstrați că:
- $[AD] \equiv [AE]$ ;
  - $[DN] \equiv [EM]$ ;
  - $\triangle AME \equiv \triangle AND$ ;
  - $\triangle MOD \equiv \triangle NOE$ ;
  - $\triangle DOE$  este isoscel;
  - $\triangle AOM \equiv \triangle AON$ ;
  - $\triangle AOD \equiv \triangle AOE$ .



8. Fie punctele coliniare A,B,C,D (în această ordine) iar M și N situate în semiplane opuse determinate de AB astfel încât  $\triangle ABM \equiv \triangle ABN$ . Arătați că  $\triangle CDM \equiv \triangle CDN$ .

9. Fie XOY și YOZ două unghiuri adiacente congruente. Dacă  $A \in [OX]$ ,  $B \in [OZ]$  și  $M \in [OY]$  astfel încât punctele A,M,B sunt necoliniare și  $[OA] \equiv [OB]$ , arătați că  $\triangle MAB$  este isoscel.

10. Pe laturile unghiului XOY construim segmentele  $[OA] \equiv [OB]$  și  $[OC] \equiv [OD]$ . Fie  $\{M\} = AD \cap CB$ . Să se arate că  $[OM]$  este bisectoarea unghiului XOY.

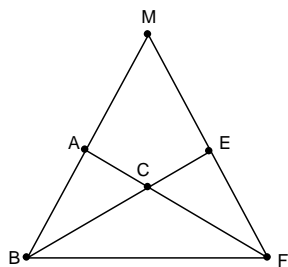
11. Fie segmentul  $[AB]$  și punctele C și D în același semiplan față de dreapta AB, astfel încât  $[AD] \equiv [BC]$ ,  $m(\angle DAB) = m(\angle CBA) < 90^\circ$  și  $(AC) \cap (DB) = \{O\}$ . Demonstrați că:

- $[AC] \equiv [BD]$ ;
- $\triangle DOC$  este isoscel.

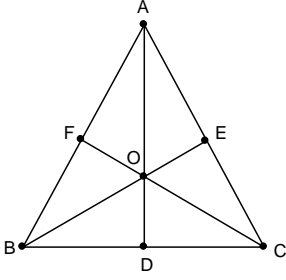
12. Fie  $\triangle ABC$ , cu  $BC = 10$  cm și  $AC = 5$  cm, iar E și F astfel încât  $(BE) \cap (AF) = \{C\}$  și  $BE = \frac{3}{2} BC$  iar

$$CF = 2AC.$$

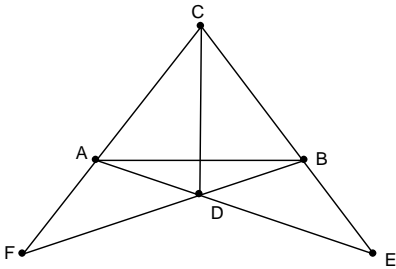
- Arătați că  $[AB] \equiv [EF]$ ;
- Dacă  $AB \cap EF = \{M\}$ , arătați că  $[MB] \equiv [MF]$ .



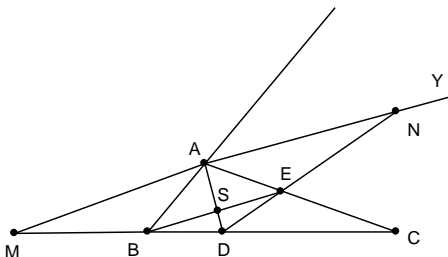
13. Se consideră  $\triangle ABC$ . Fie  $D \in (BC)$ ,  $E \in (CA)$ ,  $F \in (AB)$ , astfel încât  $AD \cap BE \cap CF = \{O\}$ ,  $[OB] \equiv [OC]$  și  $\angle AOB \equiv \angle AOC$ . Demonstrați că: a)  $[AE] \equiv [AF]$ ; b)  $m(\angle ADB) = 90^\circ$ .



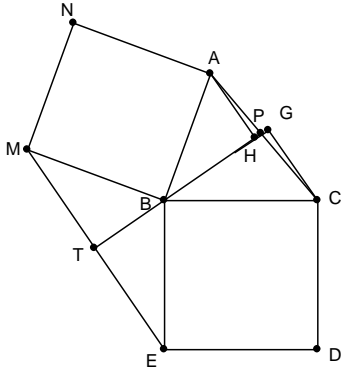
14. Se consideră segmentul  $[AB]$  și punctele  $M$  și  $N$  situate în semiplane opuse față de dreapta  $AB$ , astfel încât  $[MA] \equiv [MB]$  și  $[NA] \equiv [NB]$ . Fie  $MN \cap AB = \{O\}$ . Arătați că: a)  $[MO]$  este bisectoarea  $\angle AMB$ ; b)  $O$  este mijlocul segmentului  $[AB]$ ; c)  $MN$  și  $AB$  sunt perpendiculare.
15. În exteriorul triunghiului ascuțitunghic  $MNP$  se construiesc triunghiurile echilaterale  $MNQ$  și  $MNR$ . Arătați că  $[RN] \equiv [PQ]$ .
16. Punctele  $C$  și  $D$  aparțin mediatoarei segmentului  $(AB)$ , de o parte și de alta a acestuia, astfel încât  $AD \cap BC = \{E\}$  și  $AC \cap BD = \{F\}$ . Demonstrați că: a)  $[AE] \equiv [BF]$ ; b)  $\angle CAE \equiv \angle CBF$ .



17. Pe o dreaptă  $d$  se consideră punctele  $A, B, C, D$  în această ordine, astfel încât  $AB = BC = CD$ . Fie punctul  $E \notin d$  astfel încât  $\angle EAD \equiv \angle EDA$ . Fie  $P$  și  $F$  mijloacele segmentelor  $[AE]$ , respectiv  $[ED]$ . Să se arate că: a)  $[AF] \equiv [DP]$ ; b)  $\triangle APB \equiv \triangle DFC$ ; c)  $\angle BPE \equiv \angle CFE$ ; d)  $\triangle PBE \equiv \triangle FCE$ .
18. Fie  $\triangle ABC$  isoscel,  $AB \equiv AC$  și  $D$  mijlocul laturii  $AB$ . Perpendiculara în  $D$  pe  $AB$  intersectează dreapta  $BC$  în  $E$ . Să se arate că: a)  $\triangle EAB$  este isoscel; b)  $\angle AEB \equiv \angle BAC$ .
19. Fie  $\triangle ABC$  cu  $AB < AC$ . Fie  $AY$  bisectoarea unghiului format de latura  $[AC]$  și semidreapta  $[AB]$ . Notăm cu  $M$  punctul de intersecție al dreptei  $AY$  cu  $BC$ , iar cu  $N$  un punct pe  $[AY]$  astfel încât  $[AM] \equiv [AN]$ . Bisectoarea unghiului  $\angle BAC$  intersectează latura  $[BC]$  în  $D$ , iar  $[DN]$  intersectează pe  $[AC]$  în  $E$ . Demonstrați că: a)  $\triangle MDN$  este isoscel; b)  $\triangle AMB \equiv \triangle ANE$ ; c)  $AD \perp BE$ .



20. Fie pătratele  $ABMN$  și  $BCDE$  în exteriorul triunghiului  $ABC$  oarecare și  $P \in (AC)$  astfel încât  $PB \perp ME$ . Precizați poziția punctului  $P$ .



21. Fie triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$ ,  $M$  mijlocul lui  $[BC]$ ,  $M'$  mijlocul lui  $[B'C']$ . Dacă  $[AB] \equiv [A'B']$ ,  $[AM] \equiv [A'M']$ ,  $\angle BAM \equiv \angle B'A'M'$ , arătați că  $\triangle ABC$  și  $\triangle A'B'C'$  sunt congruente.

22. Fie  $ABC$  un triunghi isoscel,  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $D, E \in (BC)$ ,  $[BD] \equiv [CE]$ ,  $B \in (CD)$ ,  $C \in (BE)$  și  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$  astfel încât  $[AM] \equiv [AN]$ . Dacă  $DM \cap EN = \{P\}$ , arătați că: a)  $[DM] \equiv [EN]$ ; b)  $\triangle PDE$  este isoscel; c)  $AP \perp BC$ .